УДК 514.76

К. В. Полякова

ЗАДАНИЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ 1-ГО ПОРЯДКА ВЕКТОРНОЗНАЧНЫМИ ФОРМАМИ 2-ГО ПОРЯДКА

Аффинная связность задается векторами 2-го порядка, названными горизонтальными. Для аффинной связности 1-го порядка введены вертикальная и горизонтальная формы 2-го порядка. Доказано, что симметрическая аффинная связность в расслоении касательных линейных реперов определяет вертикальный линейный оператор (вертикальную вертикальнозначную форму 2-го порядка аффинной связности 1-го порядка) из касательного пространства 2-го порядка в касательное пространство 1-го порядка к многообразию. Показано, что аффинная связность в расслоении касательных линейных реперов определяет линейный оператор из кокасательного пространства 1-го порядка (пространства форм степени 1) в кокасательное пространство 2-го порядка. Доказано, что аффинная связность в расслоении касательных линейных реперов определяет горизонтальный линейный оператор (горизонтальную горизонтальнозначную форму 2-го порядка аффинной связности 1-го порядка) в касательном расслоении 2-го порядка. Показано, что второй (обычный) дифференциал точки многообразия можно представить в виде суммы вертикального и горизонтального проекторов.

Affine connection is given by 2nd order vectors called horizontal. Vertical and horizontal forms of 2nd order are entered for 1st order affine connection. It is proved that symmetric affine connection in the bundle of tangent linear frames defines vertical linear operator (a vertical vertical-valued form of 2nd order for 1st order affine connection) from 2nd order tangent space into 1st order tangent space to a manifold. It is shown that affine connection in bundle of tangent linear frames defines linear operator from 1st order cotangent space (space of forms of degree 1) in cotangent space of 2nd order. It is proved that affine connection in bundle of tangent linear frames defines horizontal linear operator (2nd order horizontal horizontal-valued form of 1st order affine connection) in 2nd order tangent bundle. It is shown that the second usual differential of a point of a manifold it is possible to present as sum of vertical and horizontal projectors.

Ключевые слова: аффинная связность, векторнозначные формы, касательное и кокасательное расслоения 2-го порядка.

Key words: affine connection, vector-valued forms, the 2nd order tangent and cotangent bundles.

1. Базисные и слоевые координаты на многообразии

Рассмотрим m-мерное гладкое многообразие X_m и некоторую окрестность, в которой текущая точка определяется локальными координатами x^i $(i, j, k, ... = \overline{1,m})$. Структурные формы ω^i многообразия X_m удовлетворяют уравнениям $D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j$, где

$$\omega^i = x^i_j dx^j\,,\ \omega^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - x^i_{jk}\omega^k \ \ (\det(x^i_j) \neq 0\,,\ x^i_{jk} = x^i_{kj}).$$

Переменные x_j^i, x_{jk}^i называются *слоевыми координатами* [5, с. 149] на многообразии X_m. Будем считать, что x_j^i — слоевые координаты 0-го порядка, x_{jk}^i — слоевые координаты 1-го порядка.

Деривационная формула нулевого порядка, то есть выражение для дифференциала точки M многообразия X_m, имеет вид [1; 9]

$$dM = \omega^i \varepsilon_i , \tag{1}$$

где ε_i — базисные векторы касательного векторного пространства TX_m в точке M. Дифференциальные 1-формы ω^i образуют кобазис, сопряженный к подвижному (неголономному) базису $\{\varepsilon_i\}$, то есть $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta_j^i$. Слоевые формы ω_j^i на базисных касательных векторах дают слоевые координаты 1-го порядка: $\omega_j^i(\varepsilon_k) = -x_{jk}^i$.

Замечание 1. Относительно натурального (голономного) репера $\{\partial_i\}$ векторы ε_i раскладываются по формуле $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}_i^j \partial_j$, где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, поэтому в натуральном репере деривационная формула 0-го порядка принимает следующий вид: $dM = dx^i \partial_i$.

2. Тангенциальнозначные формы и их дифференцирования

Из деривационной формулы (1) видим, что dM можно рассматривать как векторнозначную 1-форму со значениями в касательном пространстве TX_m, то есть тангенциальнозначную 1-форму. Обозначим множество всех тангенциальнозначных 1-форм со значениями в касательном пространстве 1-го порядка TX_m через $\Omega_1^1 = \Omega_1(TX_m)$.

В общем случае $\Omega_q^p = \Omega_q(T^p X_m)$ — множество всех векторнозначных q-форм со значениями в касательном пространстве $T^p X_m$ p-го порядка. Также будем изучать множество $\Omega_{/r}^p = \Omega_{/r}(T^p X_m)$ векторнозначных форм порядка r со значениями в касательном пространстве $T^p X_m$ порядка p. При рассмотрении множества $\Omega_q^p = \Omega_q(T^p X_m)$ мы указываем только степень q формы, но не порядок формы, подразумевая, что присутствуют лишь дифференциалы 1-го порядка. При рассмотрении множества $\Omega_{/r}^p = \Omega_{/r}(T^p X_m)$ мы указываем только порядок r формы, но не степень формы, считая, что внешние произведения отсутствуют. Случаи $p = 0$ и $q = 0$ не исключаются из рассмотрения, в частности $\Omega_1^0 = \Omega_1(R)$ — множество всех обычных дифференциальных 1-форм, $\Omega_0^1 = \Omega_0(T(X_m))$ — тангенциальнозначных 0-форм (касательных векторов): $\Omega_0^1 = TX_m$. Формы степени 1 и формы порядка 1 суть одно и тоже, то есть $\Omega_1^0 = \Omega_{/1}^0 = T^* X_m$.

Также можно использовать обозначения

$$\Omega^{p}_{/r}=\Omega_{/r}(T^{p}X_m)=T^{r*}X_m\otimes T^{p}X_m,$$

где $\Omega^{0}_{/r}=T^{r*}X_m=(T^{r}X_m)^{*}$ — множество дифференциальных форм порядка r, не совпадающее с пространством $T^{*r}X_m=(T^{*}X_m)^{r}=\wedge^{r}TX_m$ форм степени r, то есть $(T^{*}X_m)^{r}\neq(T^{r}X_m)^{*}$.

Значок тензорного умножения в выражении (1) будем опускать (см., напр.: [7, с. 290]), считая $e\otimes\omega=e\omega=\omega e$.

Действуя формой $dM=\varepsilon_i\omega^i$ на касательные векторы ε_j, $u=u^j\varepsilon_j\in TX_m$:

$$dM(\varepsilon_j)=\varepsilon_i\omega^i(\varepsilon_j)=\varepsilon_j,\ dM(u)=\varepsilon_i u^j\omega^i(\varepsilon_j)=u^j\varepsilon_j=u,$$

видим, что она соответствует тождественному преобразованию касательного пространства TX_m, то есть $dM=id_{TX_m}$, следовательно, она является *канонической формой* [4, с. 118], *формой смещения* [2, с. 117], или *структурной формой касательного расслоения* [3, с. 48].

Аналогично, действуя формой (1) на ковекторы ω^j, $\omega=a_j dx^j\in T^{*}X_m$ и считая, что $\varepsilon_i(\omega)=\omega(\varepsilon_i)$, получим

$$dM(\omega^j)=\omega^i\varepsilon_i(\omega^j)=\omega^i\cdot\omega^j(\varepsilon_i)=\omega^j,$$
$$dM(\omega)=\omega^i\cdot a_j\varepsilon_i(dx^j)=\omega^i\cdot a_j dx^j(\varepsilon_i)=\omega^i\cdot a_j x^k_i dx^j(\partial_k)=\omega,$$

то есть видим, что она соответствует тождественному преобразованию кокасательного пространства $T^{*}X_m$, то есть $dM=id_{T^{*}X_m}$. Таким образом, можно отметить двойственный характер действия векторнозначных форм 1-го порядка $\Omega=\varepsilon\omega\in\Omega^{1}_{1}=\Omega_1(TX_m)$: они действуют как в пространстве векторов TX_m, так и в пространстве ковекторов $T^{*}X_m$, то есть

$$\Omega=\varepsilon\omega:\ u\in TX_m\to\Omega(u)=\varepsilon\cdot\omega(u)\in TX_m,$$
$$\Omega=\omega\varepsilon:\ \theta\in T^{*}X_m\to\Omega(\theta)=\omega\cdot\varepsilon(\theta)=\omega\cdot\theta(\varepsilon)\in T^{*}X_m.$$

Замечание 2. В [8] подчеркивется, что и связности, и многие объекты на многообразиях струй выражаются через тангенциальнозначные дифференциальные формы, которыми легко оперировать. Эти формы составляют основу применяемой в книге [8] математической техники.

На дифференциальных формах помимо внешнего дифференциала также может действовать обычный дифференциал [12, p. 386].

Если $\omega=\omega^i\varepsilon_i$ — векторнозначная (тангенциальнозначная) 1-форма, то тогда:

1) внешний дифференциал D действует следующим способом:

$$D:\omega\in\Omega^{1}_{1}=\Omega_1(TX_m)\to D\omega=\varepsilon_i D\omega^i-\omega^i\wedge d\varepsilon_i\in\Omega^{2}_{2}=\Omega_2(T^{2}X_m);$$

2) обычный дифференциал d действует следующим способом:

$$d:\omega\in\Omega_1^1=\Omega_1(TX_m)\to d\omega=\varepsilon_i d\omega^i+d\varepsilon_i\omega^i\in\Omega_{/2}^2=\Omega_{/2}(T^2X_m).$$

При этом ε_i считаются подвижными. Внешние дифференциалы $D\omega^i\in\Omega_2^0$ представляют собой 2-формы, то есть формы степени 2; обычные дифференциалы $d\omega^i\in\Omega_{/2}^0$ — это формы порядка 2; векторы $\varepsilon_i\in\Omega_0^1=\Omega_0(TX_m)$ считаются подвижными.

Видим, что при внешнем дифференцировании векторнозначной формы увеличивается степень дифференциальной формы (но не порядок) и порядок касательного пространства, в котором она принимает значения, поскольку дифференцируется 1-формы ω^i и 0-формы ε_i. При обычном дифференцировании векторнозначной формы увеличивается порядок дифференциальной формы (но не степень) и порядок касательного пространства, в котором она принимает значения. Внешнее дифференцирование векторнозначной формы в ковариантном методе является плодотворным. Обычное дифференцирование векторнозначной формы может служить для описания геометрии Шварца 2-го порядка [11].

Замечание 3. Современный контравариантный метод использует следующий способ внешнего дифференцирования векторнозначной формы:

$$D=d_1:\omega\in\Omega_1^1=\Omega_1(TX_m)\to d\omega=\varepsilon_i D\omega^i\in\Omega_2^1=\Omega_2(TX_m),$$

при этом векторы ε_i считаются неподвижными. В этом случае увеличивается только степень формы, но не порядок касательного пространства, в котором она принимает значения.

Дифференцируя внешним образом форму (1) и разрешая по лемме Картана, получим деривационную формулу 1-го порядка

$$\Delta\varepsilon_i=\omega^j\varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

где оператор Δ действует по закону

$$\Delta\varepsilon_i=d\varepsilon_i-\varepsilon_j\omega_i^j.$$

Новые векторы ε_{ij}, принадлежащие касательному пространству 2-го порядка T^2X_m в точке M, симметричны $\varepsilon_{[ij]}=0$.

Векторы ε_{ij} являются пфаффовыми (неголономными) производными векторов ε_i, то есть $\varepsilon_{ij}=\overset{\omega}{\partial}_j\varepsilon_i$ [3, с. 67], причем

$$\varepsilon_{ij}=\overset{*}{x}{}_i^k\overset{*}{x}{}_j^l\partial_{kl}+x_{ij}^k\overset{*}{x}{}_k^l\partial_l, \tag{3}$$

где $\partial_{ij}=\dfrac{\partial}{\partial x^i\partial x^j}$.

Утверждение 1. *Тензорный закон* (2) *для базисных касательных векторов* ε_i *в корепере* $\{\omega^i\}$ *эквивалентен выражению* (3) *для пфаффовых производных* ε_{ij} *в корепере* $\{dx^i\}$ *через операторы частных дифференцирований 1-го и 2-го порядков и слоевые координаты* x^i_j, x^i_{jk}.

Доказательство. Действуя отображением (2), задаваемым деривационными формулами 1-го порядка, на векторы ε_j, получим $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \dot{\varepsilon}_{ij}$, где $\dot{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - x^k_{ij}\varepsilon_k$ — адаптированные пфаффовы производные, причем $\dot{\varepsilon}_{ij} = \partial_{\varepsilon_j}\varepsilon_i$, кроме того, $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \partial_{\varepsilon_j}\varepsilon_i$ [6]. □

3. Кокасательное пространство 2-го порядка

Дифференцируя форму (1) обычным образом, получим форму

$$d^2M = (d\omega^i + \omega^j\omega^i_j)\varepsilon_i + \omega^i\omega^j\varepsilon_{ij}, \tag{4}$$

показывающую, что касательное пространство 2-го порядка T^2X_m в точке M натянуто на векторы ε_i, ε_{ij}, то есть

$$T^2X_m = \mathrm{span}(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}),\ \dim T^2X_m = \frac{1}{2}m(m+3).$$

Пространство T^2X_m обобщает соприкасающуюся плоскость кривой трехмерного пространства, поэтому его также называют соприкасающимся пространством.

Из выражения (4) видно, что второй обычный дифференциал точки — это векторнозначная форма кокасательного пространства 2-го порядка $T^{2*}X_m$ со значениями в касательном пространстве 2-го порядка T^2X_m, то есть

$$d^2M \in \Omega^2_{/2} = \Omega_{/2}(T^2X_m).$$

Выражение для 2-го обычного дифференциала точки M многообразия относительно натуральных репера и корепера принимает вид

$$d^2M = d^2x^i\partial_i + dx^i dx^j\partial_{ij}.$$

Известно [10; 11], что $\{d^2x^i, dx^i dx^j\}$ — натуральный корепер кокасательного пространства 2-го порядка $(T^2)^*X_m = T^{2*}X_m$, $\{\partial_i, \partial_{ij}\}$ — натуральный корепер касательного пространства 2-го порядка T^2X_m. Будем полагать, что выполняются ненулевые условия сопряженности для ковекторов и векторов 2-го порядка

$$d^2x^i(\partial_j) = \delta^i_j,\ dx^i dx^j(\partial_{kl}) = \frac{1}{2}(\delta^i_k\delta^j_l + \delta^i_l\delta^j_k).$$

Из второго дифференциала (4) точки M видно, что репер $\{\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}\}$ и корепер $\{d\omega^i + \omega^j\omega^i_j, \omega^i\omega^j\}$ — сопряженные. Действительно, условия сопряженности для произвольных (неголономных, то есть не являющихся натуральными) базиса и кобазиса имеют вид

$$(d\omega^i + \omega^k\omega^i_k)(\varepsilon_j) = \delta^i_j, \ (\omega^i\omega^j)(\varepsilon_{kl}) = \frac{1}{2}(\delta^i_k\delta^j_l + \delta^i_l\delta^j_k),$$

$$(d\omega^i + \omega^j\omega^i_j)(\varepsilon_{ij}) = 0, \ (\omega^i\omega^j)(\varepsilon_k) = 0.$$

Тогда $d^2M(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$, то есть $d^2M = id_{TX_m}$; кроме того, $d^2M(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{ij}$, то есть $d^2M = id_{T^2X_m}$. Форма смещения d^2M соответствует тождественному преобразованию касательного пространства 2-го порядка T^2X_m, а также его подпространства TX_m. Аналогично, действуя формой смещения d^2M на ковекторы 2-го порядка, видим, что она соответствует тождественному преобразованию кокасательного пространства 2-го порядка $\Omega^0_{/2} = T^{2*}X_m$, то есть $dM = id_{T^{2*}X_m}$. Считаем при этом, что $\varepsilon(\omega) = \omega(\varepsilon)$. Таким образом, можно отметить двойственный характер действия векторнозначных форм 2-го порядка: они действуют как в пространстве векторов 2-го порядка T^2X_m, так и в пространстве ковекторов 2-го порядка $T^{2*}X_m$. В случае векторнозначной формы $\Omega = e\omega \in \Omega^p_{/r} = \Omega_{/r}(T^pX_m)$, принимающей значения в T^pX_m, имеем

$$\Omega = e\omega: \ u \in T^rX_m \to \Omega(u) = e \cdot \omega(u) \in T^pX_m,$$

$$\Omega = \omega e: \ \theta \in T^{p*}X_m \to \Omega(\theta) = \omega \cdot e(\theta) = \omega \cdot \theta(e) \in T^{r*}X_m.$$

Вычисляя обычные дифференциалы от форм ω^i, ω^i_j, получим следующие формы 2-го порядка:

$$d\omega^i = -\omega^i_j\omega^j - x^i_{jk}\omega^j\omega^k + x^i_jd^2x^j,$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j\omega^i_k + 2x^l_{jk}\omega^k\omega^i_l - \omega^k\omega^i_{jk} - \overset{*}{x}{}^k_jd^2x^i_k - x^i_{jk}x^k_ld^2x^l + \\ + (2x^s_{jk}x^i_{sl} - x^i_{jkl} + x^i_{js}x^s_{kl})\omega^k\omega^l.$$

Кроме того,

$$(d\omega^i)(\varepsilon_{jk}) = x^i_{jk}, \ (d\omega^i)(\varepsilon_j) = \delta^i_j, \ (d\omega^i_j)(\varepsilon_k) = -x^i_{jk}, \ (d\omega^i_j)(\varepsilon_{pq}) = x^i_{jk}x^k_{qp}.$$

Утверждение 2. *Для базисных касательных векторов 1-го и 2-го порядка* $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon' = \{\varepsilon_{ij}\}$ *справедливы равенства* $\partial_\varepsilon\varepsilon' = d\varepsilon'(\varepsilon)$, $\partial_{\varepsilon'}\varepsilon = d^2\varepsilon(\varepsilon')$.

Доказательство. Действительно, вычисляя $\partial_{\varepsilon_i}\varepsilon_{pq}$ или действуя линейным отображением $d\varepsilon_{pq}$ на касательные векторы ε_i, получим равные выражения

$$\partial_{\varepsilon_i}\varepsilon_{pq} = \overset{*}{x}{}^j_p \overset{*}{x}{}^k_q \overset{*}{x}{}^l_i \partial_{jkl} + x^j_{pq} \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{kl} ,$$

$$d\varepsilon_{pq}(\varepsilon_i) = \varepsilon_{pqi} - \varepsilon_j x^j_{pqi} + \varepsilon_j (x^j_{kq} x^k_{pi} + x^j_{pk} x^k_{qi}) - \varepsilon_{jq} x^j_{pi} - \varepsilon_{pj} x^j_{qi} .$$

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_{pq}}\varepsilon_i$ или действуя линейным отображением $d^2\varepsilon_i$ на соприкасающиеся векторы ε_{pq}, получим равные выражения

$$\partial_{\varepsilon_{pq}}\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_p \overset{*}{x}{}^k_q \overset{*}{x}{}^l_i \partial_{ljk} + x^j_{pq} \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} ,$$

$$d^2\varepsilon_i(\varepsilon_{pq}) = \varepsilon_{ipq} - \varepsilon_j x^j_{ipq} + \varepsilon_j (x^j_{kq} x^k_{ip} + x^j_{kp} x^k_{iq}) - \varepsilon_{jq} x^j_{ip} - \varepsilon_{jp} x^j_{iq} . \square$$

4. Горизонтальные векторы 2-го порядка для аффинной связности 1-го порядка

Внося формы $\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k$ аффинной связности Γ^i_{jk} в уравнения (2) для векторов ε_i, получим $\nabla\varepsilon_i = \omega^j \nabla_j \varepsilon_i$, где ковариантный дифференциал и ковариантные производные выражаются по формулам

$$\nabla\varepsilon_i = d\varepsilon_i - \varepsilon_j \tilde{\omega}^j_i , \ \nabla_j \varepsilon_i = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_k \Gamma^k_{ij} .$$

Дифференцируя векторы $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_k \Gamma^k_{ij}$, имеем

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_k (\Delta\Gamma^k_{ij} + \omega^k_{ij}) + \omega^k (\varepsilon_{ijk} + \Gamma^l_{ij}\varepsilon_{lk}) . \tag{5}$$

Если функции Γ^i_{jk} удовлетворяют известным уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l , \tag{6}$$

то уравнения (5) принимают вид

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij} = \omega^k (\varepsilon_l \Gamma^l_{ijk} + \varepsilon_{ijk} + \Gamma^l_{ij}\varepsilon_{lk}) .$$

Видно, что при условии (6) векторы $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ относительно инвариантны (так как неподвижны при фиксации точки $M \in X_m$), а следовательно, соответствуют контравариантному заданию аффинной связности Γ^i_{jk}. Хотя векторы $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_k \Gamma^k_{ij}$ заданы в касательном пространстве 2-го порядка, но задают аффинную связность 1-го порядка; $\tilde{\varepsilon}_{[ij]} = \frac{1}{2}\varepsilon_k T^k_{ij}$.

При контравариантном способе задания аффинной связности в расслоении линейных реперов $L(X_m)$ требуется инвариантность горизонтальных векторов (подпространств) относительно правых сдвигов в случае касательных векторов к расслоению $L(X_m)$. Однако, если задавать горизонтальные векторы в соприкасающемся пространстве к многообразию X_m, то инвариантность относительно правых сдвигов не требуется. Таким образом, если исходить из касательных векторов 2-го порядка к многообразию, то условие инвариантности горизонтальных подпространств относительно действия группы не нужно.

Вычисляя повторные ковариантные производные, получим

$$2\nabla_{[k}\nabla_{j]}\varepsilon_i = T^l_{jk}\tilde{\varepsilon}_{il} + R^l_{ijk}\varepsilon_l,$$

то есть тензоры кручения T^l_{jk} и кривизны R^l_{ijk} являются горизонтальной и вертикальной составляющими альтернированных повторных ковариантных производных касательных векторов (ср.: [2, с. 121]).

Определение 1. Векторы $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_k\Gamma^k_{ij}$ назовем *горизонтальными векторами 2-го порядка для аффинной связности 1-го порядка*, а подпространство $HT^2X_m = span(\tilde{\varepsilon}_{ij})$ пространства T^2X_m *горизонтальным (оснащающим [9]) пространством* в точке *M*.

В силу инвариантности векторов ε_i, а также $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, касательное пространство 2-го порядка в точке *M* распадается в прямую сумму

$$T^2X_m = TX_m \oplus HT^2X_m$$

горизонтального пространства и касательного пространства TX_m, которое будем обозначать $TX_m = VT^2X_m$ и называть *вертикальным пространством в касательном пространстве 2-го порядка* T^2X_m в точке *M*.

5. Горизонтальная и вертикальная формы 2-го порядка для аффинной связности 1-го порядка

Выражение 2-го дифференциала (4) с помощью горизонтальных векторов $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ приведем к виду $d^2M = {}^2\tilde{\omega}^i\varepsilon_i + \omega^i\omega^j\tilde{\varepsilon}_{ij}$, где формы ${}^2\tilde{\omega}^i = d\omega^i + {}+\omega^j\omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^j\omega^k$ будем называть *горизонтальными формами 2-го порядка аффинной связности 1-го порядка.* Это формы из кокасательного пространства 2-го порядка, то есть ${}^2\tilde{\omega}^i \in T^{2*}(X_m)$.

Определение 2. Назовем векторнозначную форму ${}^2\overset{v}{\tilde{\omega}} = {}^2\tilde{\omega}^i\varepsilon_i$ *вертикальнозначной формой 2-го порядка аффинной связности 1-го порядка*, векторнозначную форму ${}^2\overset{h}{\tilde{\omega}} = \omega^i\omega^j\tilde{\varepsilon}_{ij}$ — *горизонтальной горизонтальнозначной формой 2-го порядка аффинной связности 1-го порядка*.

По структуре форм видно, что вертикальнозначная форма связности принадлежит множеству векторнозначных форм 2-го порядка со значениями в касательном пространстве 1-го порядка TX_m, то есть

$${}^2\overset{v}{\tilde{\omega}} = {}^2\tilde{\omega}^i\varepsilon_i \in \Omega^1_{/2} = \Omega_{/2}(TX_m),$$

а горизонтальная форма связности принадлежит множеству векторнозначных форм 2-го порядка со значениями в касательном пространстве 2-го порядка T^2X_m, то есть ${}^2\overset{h}{\tilde{\omega}} = \omega^i\omega^j\tilde{\varepsilon}_{ij} \in \Omega^2_{/2} = \Omega_{/2}(HT^2X_m)$.

Для симметричной связности вертикальнозначная форма ${}^2\overset{v}{\tilde{\omega}} = {}^2\tilde{\omega}^i\varepsilon_i$ является *вертикальной*. Действительно, рассматривая действие вертикальных форм связности ${}^2\tilde{\omega}^i$ на горизонтальных векторах $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ видим

$$ {}^2\tilde{\omega}^i(\tilde{\varepsilon}_{jk}) = \Gamma^i_{[jk]} = \tfrac{1}{2}T^i_{jk}, $$

то есть вертикальные формы связности ${}^2\tilde{\omega}^i$ аннулируются горизонтальными векторами $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, если связность — симметрическая.

Вычислим действие вертикальной ${}^2\overset{v}{\tilde{\omega}} = {}^2\tilde{\omega}^i\varepsilon_i$ и горизонтальной ${}^2\overset{h}{\tilde{\omega}} = \omega^i\omega^j\tilde{\varepsilon}_{ij}$ форм связности на произвольном касательном векторе 2-го порядка $U = u^{ij}\varepsilon_{ij} + u^i\varepsilon_i$:

$$ {}^2\overset{v}{\tilde{\omega}}(U) = \varepsilon_i\,{}^2\tilde{\omega}^i(u^{ij}\varepsilon_{ij} + u^i\varepsilon_i) = \varepsilon_i(u^i - u^{jk}\tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj})) \overset{(\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj})}{=} \varepsilon_i(u^i - u^{jk}\Gamma^i_{jk}) = U^v, $$

$$ {}^2\overset{h}{\tilde{\omega}}(U) = \tilde{\varepsilon}_{ij}\omega^i\omega^j(u^{ij}\varepsilon_{ij} + u^i\varepsilon_i) = u^{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij} = U^h, $$

$$ {}^2\overset{v}{\tilde{\omega}}(V) = \varepsilon_i\,{}^2\tilde{\omega}^i(u^i\varepsilon_i) = V,\quad {}^2\overset{v}{\tilde{\omega}}(H) = \varepsilon_i\,{}^2\tilde{\omega}^i(u^{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}) = \tfrac{1}{2}T^i_{jk}u^{jk}\varepsilon_i \overset{\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}}{=} 0, $$

$$ {}^2\overset{h}{\tilde{\omega}}(H) = \tilde{\varepsilon}_{ij}\omega^i\omega^j(u^{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}) = H,\quad {}^2\overset{h}{\tilde{\omega}}(V) = \tilde{\varepsilon}_{ij}\omega^i\omega^j(u^i\varepsilon_i) = 0, $$

то есть вертикальная и горизонтальная формы связности — проекторы.

Определение 3. Векторы

$$ {}^2\overset{v}{\tilde{\omega}}(U) = \varepsilon_i(u^i - u^{jk}\Gamma^i_{jk}) = U^v,\quad {}^2\overset{h}{\tilde{\omega}}(U) = u^{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij} = U^h $$

назовем *вертикальной* и *горизонтальной проекциями* вектора 2-го порядка

$$ U = u^{ij}\varepsilon_{ij} + u^i\varepsilon_i \in T^2X_m. $$

Утверждение 3. *Симметрическая аффинная связность в расслоении касательных линейных реперов определяет вертикальный линейный оператор*

$$ {}^2\overset{v}{\tilde{\omega}} = \varepsilon_i\,{}^2\tilde{\omega}^i : T^2X_m \to VT^2X_m = TX_m $$

из касательного пространства 2-го порядка в касательное пространство 1-го порядка, сопоставляющий вектору $U \in T^2X_m$ *его вертикальную составляющую* U^v [10; 11]. *Этот оператор:*

1) *является проектором;*

2) *аннулирует все горизонтальные векторы* $H = u^{ij}\tilde{e}_{ij}$: ${}^2\overset{v}{\tilde{\omega}}(H) = 0$;

3) *при его ограничении на вертикальное подпространство* $VT^2X_m = TX_m$ *является тождественным отображением.*

Таким образом, ядро и образ оператора ${}^2\overset{v}{\tilde\omega} = \varepsilon_i\,{}^2\tilde\omega^i$ — горизонтальное $HT^2X_m = \mathrm{span}(\tilde\varepsilon_{ij})$ и вертикальное $VT^2X_m = TX_m = \mathrm{span}(\varepsilon_i)$ подпространства пространства T^2X_m, то есть $\mathrm{Ker}({}^2\overset{v}{\tilde\omega}) = HT^2X_m$, $\mathrm{Im}({}^2\overset{v}{\tilde\omega}) = VT^2X_m$, при этом $HT^2X_m = \mathrm{Ann}({}^2\overset{v}{\tilde\omega})$.

Утверждение 4. *Аффинная связность в расслоении касательных линейных реперов определяет линейный оператор*

$$ {}^2\overset{v}{\tilde\omega} = {}^2\tilde\omega^i\varepsilon_i : \; T^*X_m \to T^{2*}X_m $$

из кокасательного пространства 1-го порядка (пространство форм степени 1) в кокасательное пространство 2-го порядка (пространство форм порядка 2, которые также называются кодиффузорами [11, р. 408]*).*

Доказательство. При отображении ${}^2\overset{v}{\tilde\omega}$ форма $\omega = a_i\omega^i \in T^*X_m$ переводится в форму 2-го порядка

$$ {}^2\overset{v}{\tilde\omega}(\omega) = {}^2\tilde\omega^i\varepsilon_i(\omega) = {}^2\tilde\omega^i\omega(\varepsilon_i) = a_i\,{}^2\tilde\omega^i \in T^{2*}X_m . $$

Считаем при этом, что $\varepsilon_i(\omega) = \omega(\varepsilon_i)$. Если $\omega = a_i dx^i \in T^*X_m$, то

$$ {}^2\overset{v}{\tilde\omega}(\omega) = {}^2\tilde\omega^i\varepsilon_i(\omega) = {}^2\tilde\omega^i\omega(\varepsilon_i) = a_j\overset{*}{x}{}^j_i \cdot {}^2\tilde\omega^i \in T^{2*}X_m . \; \square $$

Утверждение 5 (ср.: [7, с. 298]). *Аффинная связность в расслоении касательных линейных реперов определяет горизонтальный линейный оператор*

$$ {}^2\overset{h}{\tilde\omega} = \omega^i\omega^j\tilde\varepsilon_{ij} : \; T^2X_m \to HT^2X_m $$

в касательном расслоении 2-го порядка, сопоставляющий вектору $U \in T^2X_m$ *его горизонтальную составляющую* U^h*. Этот оператор:*

1) *является проектором;*

2) *аннулирует все вертикальные векторы* $V = v^i\varepsilon_i$ *:* ${}^2\overset{h}{\tilde\omega}(V) = 0$*;*

3) *при его ограничении на горизонтальное подпространство* HT^2X_m *является тождественным отображением.*

Таким образом, ядро и образ оператора ${}^2\overset{h}{\tilde\omega} = \omega^i\omega^j\tilde\varepsilon_{ij}$ — вертикальное $VT^2X_m = TX_m = \mathrm{span}(\varepsilon_i)$ и горизонтальное $HT^2X_m = \mathrm{span}(\tilde\varepsilon_{ij})$ подпространства касательного пространства 2-го порядка T^2X_m, то есть

$$ \mathrm{Ker}({}^2\overset{h}{\tilde\omega}) = VT^2X_m = TX_m , \; \mathrm{Im}({}^2\overset{h}{\tilde\omega}) = HT^2X_m , $$

при этом $VT^2X_m = \mathrm{Ann}({}^2\overset{h}{\tilde\omega})$.

Предложение. *Форму* d^2M *можно разложить в сумму вертикального* ${}^2\overset{v}{\tilde{\omega}}$ *и горизонтального* ${}^2\overset{h}{\tilde{\omega}}$ *проекторов:* $d^2M = {}^2\overset{v}{\tilde{\omega}} + {}^2\overset{h}{\tilde{\omega}}$.

Замечание 4. В натуральных реперах и кореперах имеем

а) в индексном виде $d^2M = {}^2\tilde{\omega}^i \partial_i + dx^i dx^j \tilde{\varepsilon}_{ij}$, где

$$ {}^2\tilde{\omega}^i = d^2x^i - \Gamma^i_{jk} dx^j dx^k, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \partial_{ij} + \Gamma^k_{ij}\partial_k; $$

б) в безындексном виде $d^2M = {}^2\overset{v}{\tilde{\omega}} + {}^2\overset{h}{\tilde{\omega}}$, где

$$ {}^2\overset{v}{\tilde{\omega}} = (d^2x^i - \Gamma^i_{jk} dx^j dx^k)\partial_i, \quad {}^2\overset{h}{\tilde{\omega}} = dx^i dx^j (\partial_{ij} + \Gamma^k_{ij}\partial_k). $$

Список литературы

1. *Акивис М. А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.
2. *Бишоп Р., Криттенден Р.* Геометрия многообразий. М., 1967.
3. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Проблемы геометрии. М., 1979. Т. 9.
4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.
5. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. // ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.
6. *Полякова К. В.* Двойственные методы исследования дифференциально-геометрических структур // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2014. Вып. 45. С. 92—104.
7. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр IV: Дифференциальная геометрия. М., 1988.
8. *Сарданашвили Г. А.* Геометрия и классические поля. Современные методы теории поля. М., 1996. Т. 1.
9. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.
10. *Catuogno P.* A geometric Itô formula. Matemática Contemporânea. 2005. Vol. 33. P. 85–99.
11. *Emery M.* An Invitation to Second-Order Stochastic Differential Geometry. 42 pages. 2005. <hal-00145073>
12. *Kolář I., Michor P. W., Slovák J.* Natural operations in differential geometry // Berlin, Springer-Ferlag, 1993.

Об авторе

Катерина Валентиновна Полякова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: polyakova_@mail.ru

About the author

Katerina Polyakova – Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: polyakova_@mail.ru